УДК 517.2

О КОМПАКТНОСТИ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Э.Г.ХАЛИЛОВ

Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия

xemm@mail.ru

В работе доказано компактность оператора, порожденного производной акустического потенциала двойного слоя в пространствах Гельдера.

Ключевые слова: уравнения Гельмгольца, компактность сингулярного интегрального оператора, производный акустический потенциал двойного слоя, обобщенное пространство Гельдера.

Известно, что многочисленные задачи физики и механики (например, внешние краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца и др. (см. [1])) приводятся к сингулярному интегральному уравнению, зависящего от нормальной производной акустического потенциала двойного слоя

$$W_{k,\rho}(x) = \int_S \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \vec{n}(y)} \cdot \rho(y) dS_y, \quad x \in S,$$

где $S \subset R^3$ - поверхность Ляпунова с показателем α, $\vec{n}(y)$ - внешняя единичная нормаль в точке $y \in S$, $\Phi_k(x,y) = \dfrac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|}, x \neq y$, - фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, k - волновое число, причем $\mathrm{Im}\ k \geq 0$, а $\rho(y)$ - непрерывно дифференцируемая функция на S. Поэтому возникает интерес к исследованию компактности оператора, порожденного производной акустического потенциала двойного слоя.

Построенные (см. [2]) контрпримеры показывают, что для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью производные, вообще говоря, не существуют. Однако в работе [3] доказана следующая:

Теорема 1([3]). *Пусть* S *- поверхность Ляпунова с показателем*

$0<\alpha\le 1$, $\rho(x)$- непрерывно дифференцируемая функция на S и $\int\limits_0^{diam\,S}\frac{\omega(grad\rho,t)}{t}dt<+\infty$, где $\omega(grad\,\rho,\delta)$ - модуль непрерывности функции $grad\rho(x)$. Тогда акустический потенциал двойного слоя $W_{k,\rho}(x)$ имеет на S непрерывную производную, причем

$$grad W_{k,\rho}(x)=\int\limits_S grad_x\left(\frac{\partial\left(\Phi_k(x,y)-\Phi_0(x,y)\right)}{\partial\vec{n}(y)}\right)\cdot\rho(y)dS_y-$$

$$-\frac{3}{4\pi}\cdot\int\limits_S\frac{\left(\overrightarrow{xy},\vec{n}(y)\right)\cdot\overrightarrow{xy}}{|x-y|^5}\cdot(\rho(y)-\rho(x))dS_y+\frac{1}{4\pi}\cdot\int\limits_S\frac{\rho(y)-\rho(x)}{|x-y|^3}\cdot\vec{n}(y)dS_y,\quad x\in S, \tag{1}$$

здесь последний интеграл существует в смысле главного значения Коши. Кроме того, имеют места следующие неравенства:

$$\left\|grad W_{k,\rho}\right\|_\infty\le \mathrm{C}^{*)}\cdot\left(\int\limits_0^{diamS}\frac{\omega(grad\rho,t)}{t}dt+\|\rho\|_\infty+\|grad\rho\|_\infty\right);$$

$$\omega\left(grad W_{k,\rho},h\right)\le C_\rho\cdot\left(h^\alpha+\omega(grad\rho,h)+\int\limits_o^h\frac{\omega(grad\rho,t)}{t}dt+h\cdot\int\limits_h^{diamS}\frac{\omega(grad\rho,t)}{t^2}dt\right),$$

при $0<\alpha<1$;

$$\omega\left(grad W_{k,\rho},h\right)\le C_\rho\cdot\left(h\cdot|\ln h|+\omega(grad\rho,h)+\int\limits_o^h\frac{\omega(grad\rho,t)}{t}dt+h\cdot\int\limits_h^{diamS}\frac{\omega(grad\rho,t)}{t^2}dt\right),$$

при $\alpha=1$,

где C_ρ - положительная постоянная, зависящая лишь от S, k и ρ.

Введем следующие классы функций, определенные на промежутке $(0,diamS]$:

$$\chi=\left\{\varphi\ \middle|\ \varphi\uparrow,\lim_{\delta\to0}\varphi(\delta)=0,\varphi(\delta)/\delta\downarrow\right\},$$

$$J_0(S)=\left\{\varphi\in\chi\ \middle|\ \int\limits_0^{diamS}\frac{\varphi(t)}{t}dt<+\infty\right\},$$

и рассмотрим функцию

$$Z(h,\varphi)=\begin{cases}h^\alpha+\varphi(h)+\int\limits_o^h\frac{\varphi(t)}{t}dt+h\cdot\int\limits_h^{diamS}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt, & \text{если}\quad 0<\alpha<1,\\ h\cdot|\ln h|+\varphi(h)+\int\limits_o^h\frac{\varphi(t)}{t}dt+h\cdot\int\limits_h^{diamS}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt, & \text{если}\quad \alpha=1.\end{cases}$$

Там, где это не вызовет недоразумения, иногда будем писать $Z(h)$, $Z(\varphi)$ вместо $Z(h,\varphi)$.

---

*) Здесь и далее через С обозначены положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

Очевидно, что $\lim\limits_{h\to 0} Z(h)=0$, функция $Z(h)$ не убывает, а функция $Z(h)/h$ не возрастает.

Пусть $\varphi\in\chi$. Будем обозначать через $H_{\varphi}(S)$ линейное пространство всех
непрерывных на поверхности S функций ρ, удовлетворяющих условию

$$|\rho(x)-\rho(y)|\le C_1\cdot\varphi(|x-y|)\ ,\quad x,y\in S\,,$$

а через $H_{1,\varphi}(S)$ линейное пространство всех непрерывно дифференцируемых на поверхности S функций ρ, удовлетворяющих условию

$$|grad\rho(x)-grad\rho(y)|\le C_2\cdot\varphi(|x-y|)\ ,\quad x,y\in S,$$

где C_1 и C_2 - положительные постоянные, зависящие от ρ, а не от x и y.

Известно (см.[4]), что пространство $H_{\varphi}(S)$ является банаховым пространством с нормой

$$\|\rho\|_{\varphi}=\sup_{x\in S}|\rho(x)|+\sup_{\substack{x,y\in S\\ x\ne y}}\frac{|\rho(x)-\rho(y)|}{\varphi(|x-y|)}\,,$$

а пространство $H_{1,\varphi}(S)$– с нормой

$$\|\rho\|_{1,\varphi}=\sup_{x\in S}|\rho(x)|+\sup_{x\in S}|grad\rho(x)|+\sup_{\substack{x,y\in S\\ x\ne y}}\frac{|grad\rho(x)-grad\rho(y)|}{\varphi(|x-y|)}\,.$$

Из теоремы 1 вытекают

Теорема 2. Пусть $\varphi\in J_0(S)$, тогда оператор $K\rho=W_{k,\rho}(x)$, $x\in S$ ограничено действует из $H_{1,\varphi}$ в $H_{1,Z(\varphi)}$, причем

$$\left\|W_{k,\rho}(x)\right\|_{1,Z(\varphi)}\le \mathrm{C}\cdot\|\rho\|_{1,\varphi}.$$

Теорема 3. Пусть $\varphi\in J_0(S)$, тогда оператор $T\rho=\dfrac{\partial W_{k,\rho}(x)}{\partial\vec{n}(x)}$, $x\in S$ ограниченно действует из $H_{1,\varphi}$ в $H_{Z(\varphi)}$, причем

$$\left\|\frac{\partial W_{k,\rho}(x)}{\partial\vec{n}(x)}\right\|_{Z(\varphi)}\le \mathrm{C}\cdot\|\rho\|_{1,\varphi}.$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $\varphi_1,\varphi_2\in\chi$ и $\varphi_1=o(\varphi_2)$. Тогда пространство $H_{1,\varphi_1}(S)$ компактно вложено в пространство $H_{1,\varphi_2}(S)$.

Доказательство. Так как $\sup\limits_{\delta>0}\frac{\varphi_1(\delta)}{\varphi_2(\delta)}=\mathrm{C}<+\infty$, то $H_{1,\varphi_1}(S)\subset H_{1,\varphi_2}(S)$ и $\|f\|_{1,\varphi_2}\le \mathrm{C}\cdot\|f\|_{1,\varphi_1}$.

Пусть D - любое ограниченное множество из пространства $H_{1,\varphi_1}(S)$. Тогда при любой $f(x)\in D$

$$\|f\|_{1,\varphi_1}\le \mathrm{C}<+\infty .$$

Из тождества

$$\frac{\omega(gradf,\delta)}{\varphi_2(\delta)}=\frac{\omega(gradf,\delta)}{\varphi_1(\delta)}\cdot\frac{\varphi_1(\delta)}{\varphi_2(\delta)}$$

для функций из множества D имеем:

$$\frac{\omega(gradf,\delta)}{\varphi_2(\delta)}\le \mathrm{C}\cdot\frac{\varphi_1(\delta)}{\varphi_2(\delta)},$$

следовательно,

$$\sup_{f\in M}\frac{\omega(gradf,\delta)}{\varphi_2(\delta)}\le \mathrm{C}\cdot\frac{\varphi_1(\delta)}{\varphi_2(\delta)}.$$

В результате получаем, что $\sup\limits_{f\in M}\|f\|_{1,\varphi_2}\le \mathrm{C}$ и $\lim\limits_{\delta\to 0}\sup\limits_{f\in D}\frac{\omega(gradf,\delta)}{\varphi_2(\delta)}=0$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для любых (x_1,y_1), $(x_2,y_2)\in S$ при $|x_1-y_1|<\delta(\varepsilon), |x_2-y_2|<\delta(\varepsilon)$ имеем

$$\frac{|grad\ f(x_1)-grad\ f(y_1)|}{\varphi_2(|x_1-y_1|)}<\varepsilon,\quad \frac{|grad\ f(x_2)-grad\ f(y_2)|}{\varphi_2(|x_2-y_2|)}<\varepsilon$$

для любой $f(x)\in D$. Значит,

$$\left|\frac{grad\ f(x_1)-grad\ f(y_1)}{\varphi_2(|x_1-y_1|)}-\frac{grad\ f(x_2)-grad\ f(y_2)}{\varphi_2(|x_2-y_2|)}\right|<2\cdot\varepsilon \qquad (2)$$

Пусть $\{f_n(x)\}$- произвольная последовательность из множества D. Тогда

$$\|f_n(x)\|_{C^1(S)}\le \mathrm{C} \text{ и } \sup_{\substack{x,y\in S\\ x\ne y}}\frac{|grad\ f_n(x)-grad\ f_n(y)|}{\varphi_2(|x-y|)}\le \mathrm{C}\ \ (n=1,2,...). \qquad (3)$$

Из теоремы Арцела следует компактность последовательности $\{f_n(x)\}$ в $C^1(S)$. Не умоляя общности, будем считать , что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в смысле $C^1(S)$.

Пусть $\{(x_i, y_i): x_i \neq y_i\}$- счетное плотное множество точек множество $S \times S$. Тогда учитывая (3) получаем, что

$$\sup_i \frac{|grad\ f_n(x_i) - grad\ f_n(y_i)|}{\varphi_2(|x_i - y_i|)} \leq C .$$

Из этого неравенства при помощи диагонального процесса Кантора можно выбрать такую подпоследовательность $\{f_{nk}(x)\}$, что последовательность

$$\left\{\frac{grad\ f_{nk}(x_i) - grad\ f_{nk}(y_i)}{\varphi_2(|x_i - y_i|)}\right\}$$

сходится для каждой точки (x_i, y_i).

В силу плотности множества $\{(x_i, y_i)\}$ в $S \times S$, учитывая (2) , для любой $(x, y) \in S \times S$ $(x \neq y)$ имеем

$$\left|\frac{grad\ f_{nk}(x) - grad\ f_{nk}(y)}{\varphi_2(|x-y|)} - \frac{grad\ f_{nm}(x) - grad\ f_{nm}(y)}{\varphi_2(|x-y|)}\right| \leq$$

$$\left|\frac{grad\ f_{nk}(x) - grad\ f_{nk}(y)}{\varphi_2(|x-y|)} - \frac{grad\ f_{nk}(x_i) - grad\ f_{nk}(y_i)}{\varphi_2(|x_i - y_i|)}\right| +$$

$$\left|\frac{grad\ f_{nk}(x_i) - grad\ f_{nk}(y_i)}{\varphi_2(|x_i - y_i|)} - \frac{grad\ f_{nm}(x_i) - grad\ f_{nm}(y_i)}{\varphi_2(|x_i - y_i|)}\right| +$$

$$\left|\frac{grad\ f_{nm}(x) - grad\ f_{nm}(y)}{\varphi_2(|x-y|)} - \frac{grad\ f_{nm}(x_i) - grad\ f_{nm}(y_i)}{\varphi_2(|x_i - y_i|)}\right| \leq$$

$$\leq 4 \cdot \varepsilon + \left|\frac{grad\ f_{nk}(x_i) - grad\ f_{nk}(y_i)}{\varphi_2(|x_i - y_i|)} - \frac{grad\ f_{nm}(x_i) - grad\ f_{nm}(y_i)}{\varphi_2(|x_i - y_i|)}\right|.$$

А значить

$$\lim_{m,k \to \infty} \sup_{\substack{(x,y) \in S \times S \\ x \neq y}} \left|\frac{grad\ f_{nk}(x) - grad\ f_{nk}(y)}{\varphi_2(|x-y|)} - \frac{grad\ f_{nm}(x) - grad\ f_{nm}(y)}{\varphi_2(|x-y|)}\right| = 0 .$$

Следовательно,

$$\lim_{m,k \to \infty} \| f_{nk} - f_{nm} \|_{1,\varphi_2} = 0 .$$

Из полноты пространства $H_{1,\varphi_2}(S)$ следует сходимость последовательности $\{f_{nk}(x)\}$. Лемма доказана.

Пусть C^β- пространство Гельдера с нормой $\|g\|_{C^\beta} = \sup_{x \in S} |g(x)| +$

$\sup\limits_{\substack{x,y\in S\\ x\neq y}} \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^{\beta}}$, а $C^{1,\beta}$ - пространство непрерывно дифференцируемых функций на S , имеющих непрерывную по Гельдеру производную, с нормой

$$\|g\|_{C^{1,\beta}} = \sup_{x\in S}|g(x)| + \sup_{x\in S}|grad g(x)| + \sup_{\substack{x,y\in S\\ x\neq y}} \frac{|grad\ g(x) - grad\ g(y)|}{|x-y|^{\beta}}.$$

Теорема 2. *Пусть* S *- поверхность Ляпунова с показателем* $0<\alpha<1$. *Тогда оператор* $T\rho = \frac{\partial W_{k,\rho}(x)}{\partial \vec{n}(x)}$, $x \in S$ *вполне непрерывно действует из* $C^{1,\beta}$ $(\alpha<\beta\le 1)$ *в* C^{α}.

Доказательство. Из теоремы1 и леммы1 вытекает, что оператор $K\rho = W_{k,\rho}(x),\ x\in S$ вполне непрерывно действует из $C^{1,\beta}$ $(\alpha<\beta\le 1)$ в $C^{1,\alpha}$. Значить, если $\{\rho_n\}\subset C^{1,\beta}$ любая ограниченная последовательность, то можно выбрать сходящуюся подпоследовательность из последовательности $W_{k,\rho_n}(x)$ $(n=1,2,3...)$ в смысле $C^{1,\alpha}$. Не умаляя общности, будем считать, что $\{W_{k,\rho_n}(x)\}$ сходится в смысле $C^{1,\alpha}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} W_{k,\rho_n}(x) = W_k(x)$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\|W_{k,\rho_n}(x)-W_k(x)\|_{C^{1,\alpha}} = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\|grad\, W_{k,\rho_n}(x) - grad\, W_k(x)\|_{C^{\alpha}} = 0$. Отсюда получаем, что последовательность $\left\{\frac{\partial W_{k,\rho_n}(x)}{\partial \vec{n}(x)}\right\}$ сходится в смысле C^{α}, что и доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987, 311с.
2. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехиздат, 1953. 415с.
3. Халилов Э.Г. Некоторые свойства оператора, порожденного производной акустического потенциала двойного слоя. Сибирский математический журнал, 2014. т.55, №3, с.690-700.
4. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. Введение в теории нелинейных сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука,1980, 414 с.

BİR SİNİF SİNQULYAR İNTEQRAL OPERATORLARIN KOMPAKTLIĞI HAQQINDA

E.H.XƏLİLOV

XÜLASƏ

İşdə akustik ikiqat lay potensialının törəməsinin əmələ gətirdiyi operatorun Hölder fəzasında kompaktlığı isbat olunmuşdur.

Açar sözlər: Helmholts tənliyi, sinqulyar inteqral operatorun kompaktlığı, akustik ikiqat lay potensialının törəməsi, ümumiləşmiş Hölder fəzaları.

ON THE COMPACTNESS OF A CLASS OF SINGULAR INTEGRAL OPERATORS

E.H.KHALILOV

SUMMARY

In the work, we prove the compactness of an operator generated by the derivative of a double-layer acoustic potential in Hölder's spaces.

Key words: Helmholtz equations, compactness of a singular integral operator, derivative of a double-layer acoustic potential, generalized Hölder's space.

Поступила в редакцию: 23.09.2014 г.
Подписано к печати: 26.11.2014 г.